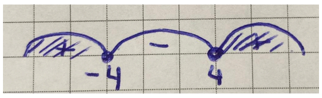
Inecuaciones polinómicas y racionales

Temas claves (Resumen) y ejercicios con solucionario

	Inecuación polinómica	**Inecuación racional**
Como lucen	$P_n(x) > 0$, $P_n(x) \geq 0$, $P_n(x) < 0$, $P_n(x) \leq 0$	$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} > 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \geq 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \leq 0$
¿En qué consisten?	Son como un polinomio normal pero con $\geq; \leq; >; <$	Es una división de polinomios con desigualdad.
Método para resolver	Valores críticos y método de Ruffini	Método de los puntos críticos • Se eliminan los que tengan discriminante negativo • Cada vez que x esté solo es 0.
Pasos para resolver.	1. Ver las observaciones 2. PRR 3. Factorizamos con ruffini 4. Valores críticos **Paso 1. Definir los puntos críticos.** x= 4, x=-4 **Paso 2. Dibujar los puntos**. • Ver si existe alguna multiplicidad par • Colocar los infinitos a los extremos • Siempre se inicia desde la derecha con el signo "+" • Ver el signo ">", "<"= Si es mayor que 0, se pintan los POSITIVOS. Si es menor que 0, se pintan los NEGATIVO • Ver si es Mayor o menor **<u>IGUAL</u>**. Si es así, los puntos serán cerrados. Si solo es mayor o menor,, los puntos serán abiertos.  **Paso 3. Definir el resultado**	• Siempre pasar toda la división en formato de resta o suma. NO multiplicar. • En algunos casos sacar M.C.M. • X siempre tiene que estár adelante, sino multiplicar por -1 y esto hace que cambie el signo • Van cerrados excepto en los que están abajo **PASO 1:** Verificar que al lado derecho sea 0, sino pasar a restar. **PASO 2:** Factorizar las que sean de cuadráticas a más. **PASO 3:** Verificar que no haya ningún X negativo **PASO 4:** Eliminar todos los discriminantes negativos **PASO 5:** Colocar los puntos críticos **PASO 6:** Graficar **PASO 7:** Colocar conjunto solución

Ejercicios Inecuaciones polinómicas (paso a paso)

Ejercicio 1.

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 \geq 0$$

Paso 1. Ver las observaciones.

- En este caso su coeficiente mayor es 1 → Todas sus x serán enteras
- La suma de todos sus coeficientes da 0 → Una de sus X será 1.

Paso 2. PRR

Como su coeficiente mayor es 1, todas sus X serán enteras. Así que veamos el término independiente.

- En este caso el término independiente es 12 así que saquemos todos los múltiplos de 12.

$$P.R.R = \left\{\frac{Divisores\ del\ término\ independiente\ (del\ que\ no\ tiene\ x)}{Divisores\ del\ coeficiente\ mayor\ (el\ que\ tiene\ el\ máximo\ exponente)}\right\} = \left\{\frac{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12}{1}\right\}$$

Paso 3. Factorizar con ruffini.

- En caso no haya ninguna observación, proceder así nomás (te recomiendo en orden de los múltiplos que sacaste). Pero como hay una. Ya sabes que una de sus X será 1. Así que empecemos

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	12
	1	3	-4	12	0

Una de las x es igual a 1.

Para escribir la respuesta, utilizamos todo el resultado y le bajamos -1 al mayor exponente. Esto sería igual a $\left(x^3 + 3x^2 - 4x - 12\right)(x - 1)$.

Ahora resolvamos $\left(x^3 + 3x^2 - 4x - 12\right)$. Si tienes calculadora. Hazlo primero en la calculadora y luego YA sabiendo las X, realizas tu ruffini. RECUERDA que en el examen te califican el proceso.

	1	3	-4	12
2		2	10	12
	1	5	6	0

Una de las x es igual a 2.

Esto sería así: $(x^2 + 5x + 6)\,(x - 1)(x - 2)$
Finalmente y el último al ser cuadrática lo resolvemos con método de aspa.

$(x^2 + 5x + 6)\,(x - 1)(x - 2)$
$x \qquad + 3$
$x \qquad + 2$

Esto sería igual a
$(x + 1)(x + 5)\,(x - 1)(x - 2)$

Paso 4.Finalmente desarrollar las X y escribir el conjunto solución
x+3=0 → x = -3
x+2=0 → x = -2
x-1 = 0 → x = +1
x-2 = 0 → x= +2

$C.S = \{-\ 3; -\ 2; +\ 1; +\ 2\}$

Ejercicio 2.

Si la compañía MADERITAS produce escritorio y los vende a 70$ cada uno. Si se fabrican y venden x escritorios mensualmente, entonces el costo total mensual de producción, en dólares, es de $C(x) = x^2 + 20x + 96$. ¿Cuántos escritorios deben venderse mensualmente para que la compañía tenga ganancia?

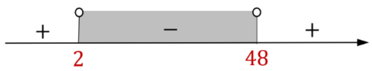
Paso 1. Identificar los datos y determinar variables
Precio de venta por escritorio: 70$
cantidad de escritorio vendidos mensualmente: x
Costo mensual de producción : $C(x) = x^2 + 20x + 96$
Ingreso I(x) = 70x

Paso 2. Identificar que tienes que realizar respecto a la pregunta:
Pregunta → necesitas tener ganancia. Esto significa que tu ingreso debe ser MAYOR a tu costo
El costo de los escritorios < Ganancia (ahora reemplazo)
C(x) < I(x)
$x^2 + 20x + 96 < 70x$

Paso 3. Reemplazar y resolver la inecuación.
$x^2 + 20x + 96 < 70x$
$x^2 + 20x + 96 - 70x < 0$
$x^2 - 50x + 96 < 0$
Factorizamos con aspa
$x^2 - 50x + 96 < 0$
$(x - 2)\ (x - 48) < 0$

Paso 4. Identificar y graficar los puntos críticos
x-2 = 0 → x= 2
x-48 = 0 → x = 48

Graficar: Pintar los negativos (<0) y los puntos son abiertos (NO es mayor igual).

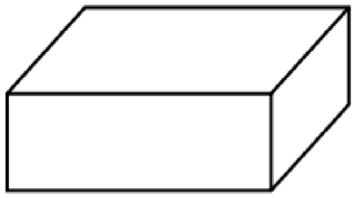


$2 < x < 48 \ \wedge \ x \in \mathbb{N}$

Paso 5. Interpretar el resultado y escribirlo.
- Para que la compañía tenga ganancia debe producir y vender más de 2, pero menos de 48 escritorios.
- Para que la compañía tenga ganancia debe producir y vender desde 3 hasta 47 escritorios.

Ejercicio 3.

Rosa desea construir una caja como la que se muestra en la figura, con 3 cm de altura y por lo menos 144 cm^3 de volumen. Si el largo de la base debe medir 2 cm más que el ancho, determine las dimensiones mínimas que puede tener la caja.



Paso 1. Identificar los datos y determinar variables
x = Longitud del ancho de la base de la caja
x+2 = Longitud del largo de la base de la caja
3 = altura
144 = Volumen mínimo de caja

Paso 2. Identificar que tienes que realizar respecto a la pregunta:
Volumen = Longitud x ancho x altura
Volumen > 144

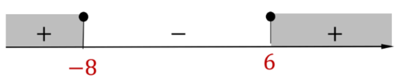
Paso 3. Reemplazar y resolver la inecuación.
V(x) = (x)(x+2)(3) > 144
(x)(x+2)(3) > 144

$x^2 + 2x \geq 48$

$x^2 + 2x - 48 \geq 0$

$(x+8)(x-6) \geq 0$

Paso 4. Identificar y graficar los puntos críticos
x+8 = 0 → x=-8
x-6 = 0 → x = 6
Graficar: Pintar los positivos (≥0) y los puntos son cerrados (SI es mayor igual).



C.S $=\langle -\infty; -8] \cup [6; +\infty \rangle$
x tiene que ser más que 6. No uso el 8 porque es negativo y es un volumen.

Paso 5. Interpretar el resultado y escribirlo.
Las dimensiones mínimas de la caja son: largo 8 cm , ancho 6 cm y altura 3 cm

Ejercicios Inecuaciones racionales (paso a paso)

Ejercicio 1.

Resuelva la siguiente inecuación racional:

$$\frac{(x^2 - x - 6)(x^3 + 4x)}{(x+3)^2(2-x)} > 0$$

Paso 1. Verificar que al lado derecho sea 0, si no pasar a restar. En este caso SI es 0.
Paso 2. Factorizamos las que sean de cuadráticas a más.

$$\frac{(x^2-x-6)(x^3+4x)}{(x+3)^2(2-x)} > 0$$

$$\frac{(x-3)(x+2)x(x^2+4)}{(x+3)^2(2-x)} > 0$$

Paso 3. Verificamos que no haya ningún "x" negativo. Si es así, multiplicar por -1 y mover la dirección de ">".

$$\left[\frac{(x-3)(x+2)x(x^2+4)}{(x+3)^2(2-x)} > 0\right] x\,(-\ 1)$$

Paso 4. E**liminar todos los de discriminante negativo (para ello más que anda fijarse en los que tienen un exponente cuadrático.**

$\frac{(x-3)(x+2)x(x^2+4)}{(x+3)^2(x-2)} < 0 \rightarrow$ En este caso el $x^2 + 4$ tiene discriminante negativo así que se elimina.

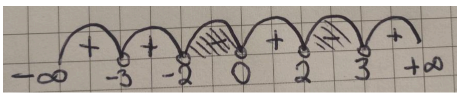
$$\frac{(x-3)(x+2)x}{(x+3)^2(x-2)} < 0$$

Paso 5. Colocar los puntos críticos

x-3 = 0 → x = 3
x+2 = 0 → x = -2
x= 0 → x = 0
x+3 = 0 → x = -3 (OJO: tiene un multiplicante PAR), esto va a ser que cambie el signo en el dibujo.
x-2 = 0 → x = 2

Paso 6. Graficar.

Sub paso 1. Se coloca en los extremos los infinitos
Sub paso 2. Ver el signo "<". En este caso como NO es igual o menor. TODOS los puntos serán ABIERTOS.
Sub paso 3. Empezar por la derecha con el signo más.
Sub paso 4. Como hay un multiplicante par, se repite el signo en -3
Sub paso 5. Se pintan los negativos porque el signo es <0 (menor a 0).



Paso 7. Colocar conjunto solución

$S = \ <-2; 0> \ \cup \ <2; 3>$

Ejercicio 2.

Resolver: $\frac{x-2}{x-3} < \frac{x-1}{x}$

$\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x} < 0$

$\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x} < 0$

$\frac{x^2-2x}{(x-3)x} - \frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)x} < 0$

$\frac{x^2-2x-[(x-1)(x-3)]}{(x-3)x} < 0$

$\frac{x^2-2x-[x^2-3x-x+3]}{(x-3)x} < 0$

$\frac{x^2-2x-[x^2-3x-x+3]}{(x-3)x} < 0$

$\frac{x^2-2x-x^2+3x+x-3}{(x-3)x} < 0$

$\frac{2x-3}{(x-3)x} < 0$

Puntos críticos

(x-3) = (x-3) = 0 → X = 3

(x) = 0 → X=0

2x-3 = 0 →

2x-3 = 0

2x = 3

$x = \frac{3}{2}$

CS:$<-\infty; 0 > U < \frac{3}{2}; 3 >$

Paso 1. Verificar que al lado derecho sea 0, si no pasar a restar.

$\frac{x-2}{x-3} < \frac{x-1}{x}$

$\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x} < 0$

ADEMÁS realizar la resta. Para eso usaremos el método de mínimo común múltiplo en el denominador. y multiplicar en aspa para el numerador.

$$\frac{(x-2)x-(x-3)(x-1)}{(x-3)x} < 0$$

Paso 2. Factorizamos las que sean de cuadráticas a más y factorizamos todo lo posible. En este caso solo hay para factorizar.

$$\frac{(x-2)x-(x-3)(x-1)}{(x-3)x} < 0$$

$$\frac{x^2-2x-(x^2-x-3x+3)}{(x-3)x} < 0$$

$$\frac{x^2-2x-x^2+x+3x-3}{(x-3)x} < 0$$

Simplificamos y eliminamos lo repetitivo

$$\frac{2x-3}{(x-3)x} < 0$$

Paso 3. Verificamos que no haya ningún “x” negativo. Si es así, multiplicar por -1 y mover la dirección de “>”.

- **En este caso NO hay.**

$$\frac{2x-3}{(x-3)x} < 0$$

Paso 4. Eliminar todos los de discriminante negativo (para ello más que anda fijarse en los que tienen un exponente cuadrático.

- **En este caso NO hay.**

$$\frac{2x-3}{(x-3)x} < 0$$

Paso 5. Colocar los puntos críticos

x-3 = 0 → x = 3 (es abierto porque va en el denominador)

x = 0 → x = 0 (Es abierto porque va en el denominador)

2x-3 = 0 → x = $\frac{3}{2}$

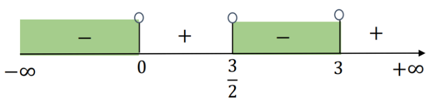
Paso 6. Graficar.

Sub paso 1. Se coloca en los extremos los infinitos

Sub paso 2. Ver el signo “<”. En este caso como NO es igual o menor. TODOS los puntos serán ABIERTOS.

Sub paso 3. Empezar por la derecha con el signo más.

Sub paso 4. Se pintan los negativos porque el signo es <0 (menor a 0).



Paso 7. Colocar conjunto solución

$$S = \ <-\infty; 0> \ \cup \ <\frac{3}{2}; 3>$$