Números complejos

Temas claves (Resumen) y ejercicios con solucionario

Teoría necesaria

$$z = a + bi$$

Número real: todos los números que conocemos

Parte imaginaria: Raíces negativas que no existen

Propiedades (lo más importante)

a) Propiedades de potencia

Potencias de i	Teoría de exponentes
$i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$	$a^{m+n} = a^m . a^n$ $(a^m)^n = a^{m.n}$
Potencias del número imaginario	
$(1 + i)^2 = 2i$ $(1 - i)^2 = -2i$	

b) Propiedades de igualdad

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2):\ \ a = c \\ Im(z_1) = Im(z_2):\ \ b = d \end{cases}$$

Traducción: si hay dos números imaginarios iguales. Toda la parte entera será igual y toda la parte imaginaria será igual.

c) Conjugado

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

El conjugado simplemente es el número imaginario pero con el signo contrario.

d) Operaciones

Operación	Resultado matemático	Explicación
Adición	$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$	Se suman sus partes reales y se suman sus partes imaginarias. Finalmente se suman ambos resultados.
Sustracción	$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$	Se restan sus partes reales y se restan sus partes imaginarias. Finalmente se suman ambos resultados.
Multiplicación	$z_1 . z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	Se multiplica
División	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$	

e) Factorizaciones claves

$(a.b)^n = a^n . b^n$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejercicios y resolverlos paso a paso

Ejercicio 1.

Efectúe las operaciones indicadas y escriba la respuesta en la forma binomial:

a) $\dfrac{(2+i)^2+(1+i)^2}{1-2i}$

Paso 1. Identificar qué propiedades rápidas aplicar y reemplazar

$(2\ +\ i)^2$	$(1\ +\ i)^2\ =\ 2i$
Sub paso 1: Es un trinomio cuadrado perfecto $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $2^2\ +\ 2.2.i\ +\ i^2$ **Sub paso 2. Reemplazo el** i^2 $4\ +\ 4i\ +\ i^2$ $4\ +\ 4i\ -\ 1\ =\ 3\ +\ 4i$	

Paso 2. Reemplazar y ver qué operaciones se efectúan. En este caso. División.
En la división se multiplica por la conjugada. Ahora aplicamos la multiplicación.

$$\frac{(3+4i)+2i}{1+2i} = \frac{3+6i}{1+2i} = \left(\frac{3+6i}{1+2i}\right)\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right) = \left(\frac{3+12i+12i^2}{1+4}\right) \frac{\rightarrow se\ aplicó\ propiedad}{\rightarrow se\ aplicó\ resta\ de\ cuadrados}$$

Paso 3. Reemplazar el i^2

$$\frac{3+12i+12i^2}{1+4} = \frac{3+12i+12(-1)}{5} = \frac{3+12i-12}{5} = \frac{-9+12i}{5} = \frac{-9}{5} + \frac{12}{5}i$$

Ejercicio 2.

Efectúe las operaciones indicadas y escriba la respuesta en la forma binomial:

b) $\dfrac{(1+i)^5+5+3i}{(i-1)^2}$

Paso 1. Identificar qué propiedades rápidas aplicar y reemplazar

$(1+i)^5$	$(i-1)^2$
$=\left((1+i)^2\right)^2(1+i)$ $=(2i)^2\ (1+i)$ $=\mathbf{-4(1+i)=-4-4i}$	$(i-1)^2=i^2-2i+1$ $=-1-2i+1$ $=\mathbf{-2i}$

Paso 2. Reemplazar y ver qué operaciones se efectúan. En este caso. División. En la división se multiplica por la conjugada. Ahora aplicamos la multiplicación

$$\frac{(1+i)^5+5+3i}{(i-1)^2}=\frac{(-4-4i)+5+3i}{-2i}=\left(\frac{1-i}{-2i}\right)\left(\frac{2i}{2i}\right)$$

Paso 3. Reemplazo los i

$$\frac{2i-2i^2}{-2^2.i^2}=\frac{2i-2(-1)}{-4.(-1)}=\frac{2i+2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Ejercicio 3.

Si en la siguiente ecuación x e y representan números reales, determine sus valores.

$$\frac{x+3+xi}{y+i} = 2+i$$

Paso 1. Paso a multiplicar el y+1 al otro lado.

$$x+3+xi = (2+i)(y+i)$$

Paso 2. Aplico la propiedad de multiplicación.

$$x+3+xi = (2+i)(y+i)$$

$$x+3+xi = 2y+2i+yi+i^2$$

$$x+3+xi = 2y-1+2i+yi$$

Paso 3. Aplico la propiedad de igualdad. Lo real se iguala, lo imaginario se iguala.

$$(x+3)+xi = (2y-1)+(2+y)i$$

Paso 4.Realizar mis igualaciones y la respuesta es..

Parte real	Parte imaginaria
$x+3 = 2y-1;$ **x=8**	$x = 2+y$ $8 = 2 + y$ **y=6**