

Funciones cuadráticas



Teoría y ejercicios resueltos paso a paso

¿Qué es una función cuadrática?

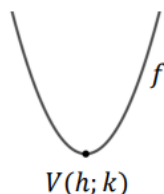
Es una función que se forma de una ecuación de 2do grado. Está por lo tanto tiene un "gráfico" que se le llama parábola la cual será como una "U" o su inversa "∩"

Observación 1.

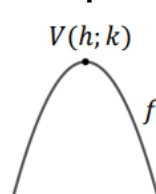
Recordemos que: una ecuación de 2do grado se escribe de esta manera: $ax^2 + bx + c = 0$

Cuando "a" sea mayor a 0 (positivo), la parábola ira en forma de U	Cuando "a" sea menor a 0 (negativo) la parábola irá en inversa "∩"
	

Observación 2: El vértice "V" de la parábola es el punto más alto o el más bajo

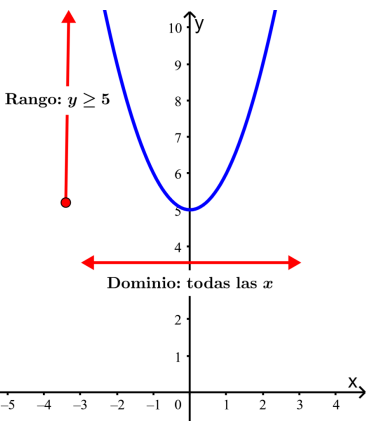
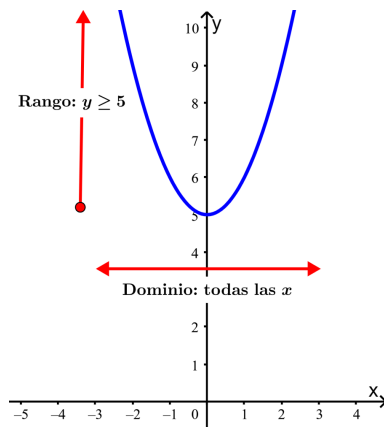


Para $x = h$, k representa el valor mínimo de la función.
Es decir: $k = f_{\text{mínimo}}$



Para $x = h$, k representa el valor máximo de la función.
Es decir: $k = f_{\text{máximo}}$

Observación 3 (para recordar)

Dominio	Rango
Nos referimos a que tan grande de manera LATERAL (horizontal) es nuestro gráfico	Nos referimos a que tan grande de manera de "arriba hasta abajo" (vertical) es nuestro gráfico.
	
Para ello nos guiamos de los valores de x	Para ello nos guiamos de los valores de y

¿Cómo resolver una función cuadrática? Con 5 simple pasos:

1. Determinar el dominio
2. Hallar el vértice $V(h;k)$
3. Tabular
4. Graficar (con los puntos hallados en la tabulación)
5. Describir el rango.

Ejemplo

Ejm: $f(x) = 3x^2 - 6x + 1; x \in <-2; 3]$

¿Cómo resolverlo?

Paso 1: Determinar el dominio

El dominio me lo dan cuando dicen $x \in <-2; 3]$ ¿Qué significa eso? que x se encontrará entre los números -2 al 3. Por lo tanto se escribe de la siguiente forma:

$$\text{Dom}(f) = <-2; 3]$$

Paso 2: Hallar el vértice $V(h;k)$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(3)} = 1$$

$$k = f(1) = -2$$

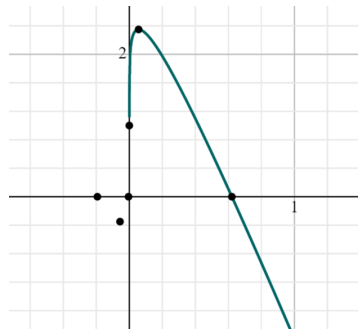
$$V = (1; -2)$$

Paso 3: Tabular

X	Y
-2	25
3	10
0	1

Si tengo punto límites en mi dominio, usualmente son los primeros que tabulo

Paso 4: Graficar



Paso 5: Hallar el Dominio (f) y en Rango (f)

$$\text{Ran}(f) = [-2; 25>$$

Ejercicios de prácticas pasadas

4. Sea la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $-1 < x \leq 4$

Grafique la función en el plano cartesiano y determine lo siguiente:

- Las coordenadas del vértice.
- El rango de la función.
- Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados, en caso de que existan.
- Calcule el valor de $2f(4) - 3f(2)$.

1. Determinar el dominio

$$\text{Dom}(f) = (-1; 4]$$

2. Hallar el vértice $V(h; k)$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

$$k = f(2) = -1 \rightarrow x^2 - 4x + 3 \rightarrow 2^2 - 4(2) + 3 = -1$$

$$V = (2; -1)$$

3. Tabular

X	Y
-1	8
4	3
2	-1

$$f(-1) = x^2 - 4x + 3 = -1^2 - 4(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$

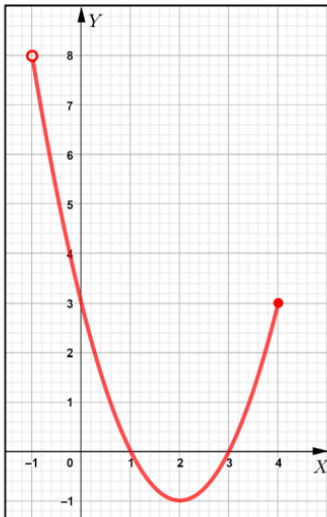
$$f(4) = x^2 - 4x + 3 = 4^2 - 4(4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$\text{Dom}(f) = (-1; 4]$$

Pones los números extremos del dominio

Utilizas un número que esté dentro de ese rango.

- Graficar (con los puntos hallados en la tabulación)



5. Describir el rango.

$$R(x) = [-1; 8>$$

Ahora: Para resolver “problemas”

¿Cómo resolver un problema de f.cuadrática? Con 3 simple pasos:

Paso 1. Colocar datos, variables y determinar si quiero hallar el mínimo o máximo.

Paso 2. Hallar vértice.

Paso 3. Responder

Problema 1.

Un empresario fabrica muebles para computadoras. Si se sabe que el costo C (en soles) de producir x muebles diarios está dado por la ecuación:

$$C(x) = x^2 - 120x + 4000$$

Determine el número de muebles que debe fabricarse diariamente para que el costo sea mínimo y además calcule el valor del costo mínimo.

Paso 1. Colocar datos, variables y determinar si quiero hallar el mínimo o máximo.

En los problemas primero tenemos que plantear los datos.

- Quiero hallar el costo Mínimo
- x = la cantidad de muebles que se producirán en un día.

¿Mi parábola cómo será? Para arriba → porque x es positiva y el gráfico será tipo U

Paso 2. Hallar vértice.

$$a = 1; b = -120; c = 4000$$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-120)}{2(1)} = 60 \rightarrow \text{será mi producción ideal}$$

$$k = C(60) = (60)^2 - 120(60) + 4000 = 400 \rightarrow \text{será mi costo mínimo}$$

$$V = (2; -1)$$

$$v(h; k)$$

Paso 3. Responder.

- Diariamente debe fabricarse 60 muebles para computadoras

- b) El valor del costo mínimo es de S/.400

Problema 2.

La relación entre la utilidad semestral U de una empresa de seguros y la cantidad de dinero x invertido en publicidad está descrita por la función: $U(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x + 175$, donde U y x se miden en miles de dólares.

- a) Determine la cantidad de dinero x que debe invertir la empresa de seguros en publicidad durante el semestre, para que su utilidad se maximice.

Paso 1. Colocar datos, variables y determinar si quiero hallar el mínimo o máximo.

x = miles de dólares invertidos en la publicidad

Quiero hallar la utilidad máxima → el punto máximo (sería el vértice)

Paso 2. Hallar vértice.

$$a = -\frac{1}{4}; b = +5; c = 175$$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(5)}{2(-\frac{1}{4})} = 10 \rightarrow \text{será mi cantidad en miles para la publicidad}$$

$$k = U(10) = -\frac{1}{4}(10)^2 + 5(10) + 175 = 200 \rightarrow \text{será mi utilidad máxima en miles}$$

Paso 3. Responder

Serían 10 mil dólares la cantidad a invertir en publicidad para maximizar la utilidad

La utilidad máxima obtenida por la empresa es de 200 000 dólares.