Alexia Rosas T

Modelos matemáticos

Problemas de costo, ingreso, utilidad y volumen (con funciones)

Costo, ingreso y utilidad

Costo unitario	Costo de producción de un solo producto
Costo total	Costo de producción del total de productos
Ingreso	Ingreso = (precio unitario) (número de unidades vendidas)
Utilidad	U = Ingreso - costo total

Ejemplo 1.

Un fabricante de muebles vende en 200 soles cada escritorio. El costo total producir x escritorios es $C(x) = 50x + 8000$ soles

a) Halle la función de utilidad del fabricante
b) ¿Cuántos escritorios debe fabricar y vender para obtener una utilidad de 10 000 soles?

Respuesta A:

Utilidad = Ingresos - Costos
x: número de escritorios producidos a vender
Ingresos: $I(x) = 200x$
Costos: $C(x) = 50x + 8000$
Utilidad: $U(x) = 200x - (50x + 8000) = 150x - 8000$

Respuesta B:

Paso 1. Igualar la función utilidad a 10 000.

$U(x) = 10000$
$150x - 8000 = 10000$
$150x = 18000$
$x = 120\, unidades$

Paso 2. Interpretar la respuesta (importante sino bajan puntos)

Rpta: Para obtener una utilidad de 10 000 soles se deben producir y vender 120 escritorios.

Alexia Rosas T

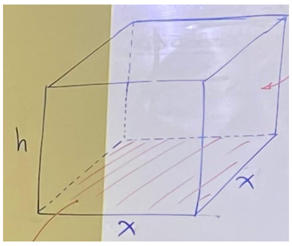
Ejercicios

Ejercicio 6.

Se dispone de \$64 para construir una caja sin tapa de base cuadrada. El material para la base cuesta \$4 por m^2 y para los lados, \$3 por m^2 . Exprese el volumen en función de la longitud de un lado de la base e indique su dominio.

DATO: El dominio en un problema así significa que hallen los límites donde el negocio funciona bien y no existe ningún problema.

Paso 1. Dibujar la caja y determinar las variables.



Variable	¿Cuál es su valor?
X	Longitud del lado de la base cuadrada de la caja
Volumen	$V(x) \ = \ (área\ de\ la\ base)\ x\ h\ (altura)$ $V(x) \ = \ x^2 . h$
h	altura de la caja

Paso 2. Hacer la función del costo de una caja.

El costo de la caja = el costo de los lados + el costo de la base

64 = (son 4 lados que cuestan 3 dólares por m^2) + (es una base cuadrada que cuesta 4 dólares por m^2)

$64 \ = [(h. x)3]4 \ + \ x^2 . 4$

Paso 2. Hallamos "h" en función a "x"

$64 \ = [(h. x)3]4 \ + \ x^2 . 4$

$64 \ = [(h. x)3]4 \ + \ x^2 . 4$

$64 \ = \ 12xh \ + \ 4x^2$

$64 \ - \ 4x^2 \ = \ 12. x. h$

$h \ = \ \frac{64-4x^2}{12x} \ \Rightarrow \ h \ = \frac{16-x^2}{3x}$

Paso 2: Reemplazamos "h"(en función a x que se hizo en el paso 2) en la ecuación del volumen

$V(x) \ = \ x^2 . h$

$V(x) \ = \ x^2 . \frac{16-x}{3x}$

Alexia Rosas T

Paso 3. El volumen tiene que ser positivo, por lo tanto..

$V(x) \ = x^2 . \frac{16-x}{3x} > 0$

Paso 4. Resolver la desigualdad.

$V(x) \ = x^2 . \frac{16-x}{3x} > 0$

Subpaso 1. Paso el 3x a multiplicar.

$x(16 - x^2) > 0$

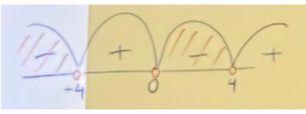
Subpaso 2. Vuelvo al x positivo al multiplicar todo por -1,cambió el signo y factorizo.

$x(x - 4)(x + 4) \ < 0$

Subpaso 3. Hallo los puntos críticos.

X=0 X= 4 x=-4

Subpaso 4. Gráfico.



$x\, e \ <- \infty; - 4 > \ \cup \ < 0; \ 4 >$

Saldría así, pero como el V no puede ser menor a 0, la respuesta se limita a los números mayores a 0.

Respuesta:

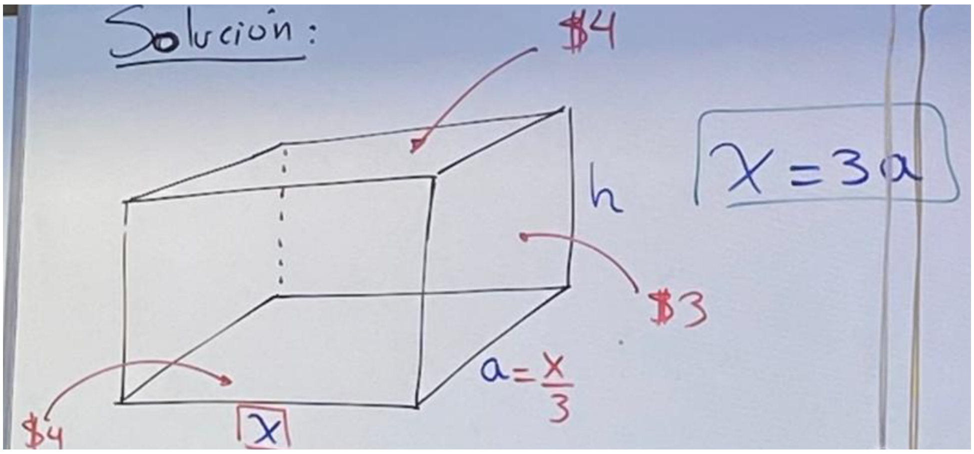
$Dom\,(V) \ = \ \ < 0; 4 >$

Alexia Rosas T

Ejercicio 5.

La base de una caja rectangular cerrada es tal que su largo (x) es el triple del ancho. La caja tiene un volumen de 25 pulgadas cúbicas. El material para la base y la tapa cuesta $4 por pulgada cuadrada y el de los lados, $3. Exprese el costo de la construcción en función de x y halle su dominio.

Paso 1: dibujo



Paso 1. Determinar variables

x	Longitud del largo de la base de la caja (en pulgadas)
x	3a → porque dice que es el triple del anchoa
a	Longitud del ancho de la base de la caja (en pulgadas).
h	Altura de la caja (en pulgadas)
x.a.h	Volumen de la caja

Paso 2. Determinar equivalencias en función a X

x = 3a → porque dice que es el triple del ancho

a = (x/3)

Volumen de la caja

x.a.h = 25 pulgadas cúbicas = el volumen de la caja

x.a.h = 25

$x.(\frac{x}{3}).h = 25$

$h = \frac{75}{x^2}$

Paso 3. Costo en construir <u>los lados</u> de la caja

$C_1(x) = (2xh + 2ah).(3)$

$C_1(x) = (6x.\frac{75}{x^2} + 6.\frac{x}{3}.\frac{75}{x^2})$

$C_1(x) = \frac{450}{x} + \frac{150}{x} = \frac{600}{x}$

Paso 4. Costo en construir la base y la tapa de la caja

$C_2(x) = 4\,(2x.a)$

$C_2(x) = 8x.\frac{x}{3}$

$C_2(x) = \frac{8x^2}{3}$

Paso 5. Hallar el costo total sumando el costo de los costos de la los lados, base y tapa (los 2 anteriores).

$C(x) = \frac{600}{x} + \frac{8x^2}{3}$

Paso 6. Hallo las restricciones

x > 0 → Porque es una longitud sino la caja no existiría

$Dom(c) = \ <0; +\infty>$

Alexia Rosas T

Ejercicio 2

Un fabricante de Gamarra vende 900 polos semanales al precio de 10 soles cada uno. El costo de cada polo es de 5 soles. El fabricante quiere aumentar el precio del polo y por los estudios de mercado realizados determina que por cada 50 céntimos de incrementos en el precio del polo se venderán 60 polos menos cada semana. Halle la función de utilidad semanal del fabricante, su dominio y trace su gráfica.

Paso 1. Definir las variables

Variable o datos	**¿Qué significa?**
x	Número de incremento de 0.50 céntimos en el precio de venta. DATO. ¿Quién es x? $Pv = 10 \rightarrow Vende: 900\, polos$ $Pv = 10 + 1(0.5) \rightarrow 900 - 1(60)$ $Pv = 10 + 2(0.5) \rightarrow 900 - 2(60)$ $Pv = 10 + 3(0.5) \rightarrow 900 - 3(60)$ Entonces… $Pv = 10 + x(0.5) \rightarrow 900 - x(60)$
Pv = 10	Precio de venta por polo ANTES (sin el aumento de 0.50)
Pv = 10+x(0.5)	Precio de venta por polo AHORA (con el aumento de 0.50)
Cu = -5	Costo unitario por polo (no hay cambios)
900-60x	Cantidad de polos vendidos
U	Utilidad = (Pv - Cu). Cantidad

Paso 2. Hallamos la utilidad reemplazando las variables.

Utilidad = (Pv-Cu).Cantidad

$U = (10 + x(0.5) - 5).(900 - 60x)$

$U(x) = (5 + 0.5x)(900 - 60x)$

$U(x) = 4500 - 300x + 450x - 30x^2$

Paso 3. Resolver la función utilidad para graficar.

$U(x) = 4500 - 300x + 450x - 30x^2$

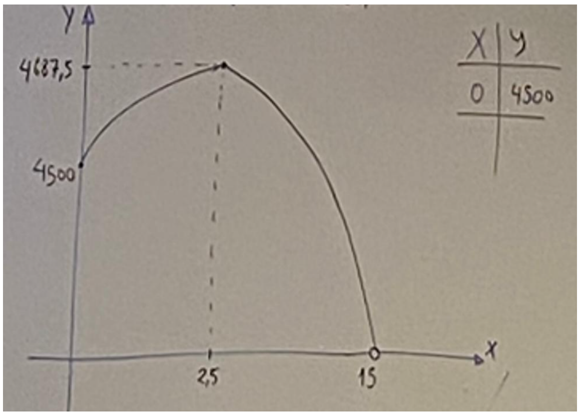
Es una cuadrática así que los pasos son los siguientes:

Sub paso 1. Hallar el vértice.	**Sub paso 2. Tabular.**
Vértice: $V(h; k)$ $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-150}{2(-30)} = 2,5$ $k = U(2,5) = 4687,5$	x | y: 0 | 4500; 15 | 0

x	y
0	4500
15	0

Alexia Rosas T

Sub paso 3. Graficar los puntos en una gráfica.



Paso 4. Colocar el dominio

$Dom\ (U)\ =\ [0; 15 >$

Sería 0 porque es el mínimo de incrementos que puedo hacer y 15 porque después de eso es pérdida.

Ejercicio 7

Una compañía de buses para su campaña "Viajes de promoción" ha adoptado la siguiente política de precios: para grupos formados por no más de 30 alumnos se les cobrará la cantidad fija de $1500; para grupos conformados entre 30 y 70, cada alumno pagará $50 y tendrá un descuento de 50 centavos de dólar por cada alumno adicional a 30; la tarifa más baja de la compañía, $30 por alumno se ofrecerá a grupos de 70 o más.

Paso 1. Definir las variables.

Variables	¿qué significan?
X	Número de alumnos que conforman el grupo

Paso 2. Defino los 3 casos que hay. Expreso los ingresos de la compañía en función del número de alumnos que conforman los grupos.

	Grupos menos de 30 alumnos	Grupos entre 30 y 70	Grupos de 70 o más.
Cantidad de alumnos	$x \leq 30$	30 < x < 70	$70 \leq x$
Precio que pagarían	1500	$(50)x - 0.5(x - 30)$	$30x$
La función que sería	1500; $x \leq 30$	$x.[(50)x - 0.5(x - 30)]$;30 < x < 70	$30x$; $70 \leq x$

Conclusión: Es una función por tramos

Paso 3. Junto las tres en una sola función → Determinó la función ingreso.

$$\textit{Función ingreso: } I(x) \begin{cases} 1500 & ; x \leq 30 \\ (50)x - 0.5(x - 30) & ;30 < x < 70 \\ 30x & ; 70 \leq x \end{cases}$$

Paso 4. Determinar cuánto es el ingreso de la compañía si tengo 68 alumnos. Reemplazó la función que va con 68, la segunda en este caso.

$I(68)$ $=68.[(50)68 - 0.5(68 - 30)]$

$I(68)$ $=$

Respuesta b: El ingreso de la compañía es de 2018.

Paso 5. Graficar para la respuesta C.

$$\textit{Función ingreso: } I(x) \begin{cases} 1500 & ; x \leq 30 \\ 65 - 0.5x^2 & ;30 < x < 70 \\ 30x & ; 70 \leq x \end{cases}$$

Función constante	Función cuadrática	Función lineal
Se traza una línea de 1500 hasta el 30.	Paso 1. Se halla el vértice.	Paso 1. Tabulamos

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$h = \frac{-b}{2a} = \frac{65}{2(-0.5)} = 65$
$k = I(65) = 21125$

Paso 2. Se tabula.
<table>
<tr><td>X</td><td>Y</td></tr>
<tr><td>30</td><td>1500</td></tr>
<tr><td>70</td><td>2100</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>X</td><td>Y</td></tr>
<tr><td>70</td><td>2100</td></tr>
<tr><td>72</td><td>2160</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Así se vería el gráfico final: